SEMINAR ÜBER SHIMURA-VARIETÄTEN

U. GÖRTZ, SS 2009

Einleitung

Shimura-Varietäten sind über Zahlkörpern definierte Varietäten, die eine in verschiedener Hinsicht reiche Struktur tragen, und in der Zahlentheorie und algebraischen Geometrie eine wichtige Rolle spielen. Sie stellen eine weitreichende Verallgemeinerung der klassischen Modulkurven dar.

Die Verweise unten beziehen sich großenteils auf den Übersichtsartikel [M1], in dem das material in leichter verdauliche Häppchen aufgeteilt ist. Die Originalarbeiten [D1] und [D2] sind aber als zusätzliche Lektüre dringend empfohlen!

In Essen findet zur Zeit ein ähnliches Seminar statt; siehe das ausführliche Programm [KR].

Programm

0.1. **Hermitesch-symmetrische Bereiche.** Wir beginnen mit dem Begriff des hermitesch-symmetrischen Bereichs. Zur Klassifikation brauchen wir nicht so viel zu sagen, die entsprechende Liste sollte aber genutzt werden, um mehrere Beispiele zu geben. [M1] §1.

0.2. **Lokal symmetrische Räume.** Nun betrachten wir Quotienten von hermitesch-symmetrischen Bereichen nach (gewissen) diskreten Gruppen. Der wichtigste Satz ist der Satz von Baily und Borel, der zeigt, dass solche Quotienten in manchen Fällen algebraische Varietäten sind. [M1] §3.

0.3. **Hodge-Strukturen.** Als weitere Vorbereitung brauchen wir den Begriff der Hodge-Struktur, und der Variation von Hodge-Strukturen. [M1] §2.

0.4. **Adele, zusammenhängende Shimura-Varietäten.** Nun führen wir den "adelischen Standpunkt" ein, und definieren den Begriff der zusammenhängenden Shimura-Varietät, [M1] §4. Außerdem §bis Thm. 5.4.

0.5. **Shimura-Varietäten.** In diesem Vortrag definieren wir Shimura-Daten und —endlich— Shimura-Varietäten, [M1] §5 ab Def. 5.5.

0.6. **Siegelsche Modulvarietäten.** Die einfachste Verallgemeinerung der Modulkurven sind die Siegelschen Modulvarietäten, die eine einfache Beschreibung als Modulräume abelscher Varietäten besitzen. [M1] §6.

0.7. **Komplexe Multiplikation.** Wir wollen in diesem und dem nächsten Vortrag den Begriff des kanonischen Modells einer Shimura-Varietät anreißen. Zur Vorbereitung lernen wir etwas über komplexe Multiplikation abelscher Varietäten, [M1] §10, §11, siehe auch [M2]. Das Beispiel elliptischer Kurven sollte sorgfältig behandelt werden.

0.8. **Kanonische Modelle von Shimura-Varietäten.** In diesem Vortrag soll ein Abriss der Ergebnisse, die in [M1], §§12–14, vorgestellt werden, gegeben werden. Siehe auch [D2].

0.9. **Picardsche Modulflächen I.** In den letzen beiden Vorträgen wollen wir die allgemeinen Begriffe noch einmal anhand eines konkreten Beispiels anschauen, nämlich dem der Picardschen Modulflächen. Wir richten uns nach Gordons Artikel [G]. Im ersten der beiden Vorträge sollten §1–§3 behandelt werden.

0.10. **Picardsche Modulflächen II.** Zum Schluss besprechen wir §4 und §5 aus [G].

Literatur

[D1] P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Sém. Bourbaki, exp. 389, 1971.

[D2] P. Deligne, *Variétés de Shimura: Interpretation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, in: Proc. Symp. Pure Math. **33** (Corvallis), part 2, 1979

[G] B. Gordon, *Canonical models of Picard modular surfaces*, in: R. Langlands, D. Ramakrishnan, The zeta function of Picard modular surfaces, CRM 1992.

[KR] S. Kukulies, K. Rülling, *Shimura varieties and their canonical models*, Programm zum Forschungsseminar, Univ. Duisburg-Essen, SS09. siehe http://www.uni-due.de/~mat903/agseminar_ss09.html

[M1] J. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, in: J. Arthur, D. Ellwood, R. Kottwitz (eds.), Harmonic Analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Proc. Clay Math. Inst. 2003 Summer school, 2005; erhältlich unter http://www.jmilne.org/math

[M2] J. Milne, *The fundamental theorem of complex multiplication*, 2007, erhältlich unter http://www.jmilne.org/math