Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. J. Ludwig

WS 2016/17

Algebra II

8. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|$. Sei $d(x,y) = |x-y|$.

a) Sei $D(a,r) = \{x \in K;\ d(x,a) \leq r\}$, $a \in K$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, die 'abgeschlossene' Kreisscheibe um a mit Radius r. Zeige, daß $D(a,r)$ offen und abgeschlossen in K ist.

b) Zwei Kreisscheiben D, D' in K sind entweder disjunkt oder konzentrisch, d.h. entweder $D \cap D' = \varnothing$ oder es existiert $a \in K$ mit $D = D(a,r)$, $D' = D(a,r')$.

c) Jedes Dreieck ist gleichschenklig: Sind $x, y, z \in K$, $d(x,z) < d(y,z)$, so gilt $d(y,z) = d(x,y)$.

Aufgabe 2:

Sei K ein vollständig nicht-archimedisch bewerteter Körper, R der zugehörige Bewertungsring und $\mathfrak{p}$ dessen maximales Ideal. Ist $u \in R$ mit $u \equiv 1 \mod \mathfrak{p}$, und m eine natürliche Zahl, die nicht von der Charakteristik des Restklassenkörpers geteilt wird, so ist u eine m-te Potenz in K.

Aufgabe 3:

Sei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel in einem algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}_p$. Zeige, daß $\mathbb{Q}_p(\zeta) = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p-1]{-p})$.

Tipp: Schreibe $p = (1-\zeta)^{p-1}\varepsilon$ in $\mathbb{Q}_p(\zeta)$, und zeige mit Hilfe von Aufgabe 2, daß $-\varepsilon$ eine $(p-1)$-te Potenz in $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ ist.

Aufgabe 4:

Sei K vollständig bezüglich des nicht-archimedischen Betrages $|\cdot|$, und sei f ein normiertes Polynom mit Koeffizienten im zugehörigen Bewertungsring R. Ferner sei f separabel. Wir bezeichnen mit $\mathrm{disk}(f)$ die Diskriminante von f. Zeige: Gibt es ein $\beta \in R$ mit $|f(\beta)| < |\mathrm{disk}(f)|$, so besitzt f eine Nullstelle in K.

Abgabe: Montag, 12. Dezember 2016.